• Να υπολογιστεί αριθμητικά με τη μέθοδο Simpson και με βήμα $h=0{,}2$ το ολοκλήρωμα $\int_{-0.2}^{0.6} \frac{dx}{x+2}$.

ΚΕΦ. 5ο

Πόσα βήματα της μεθόδου απαιτούνται τουλάχιστον ώστε το σφάλμα ολοκλήρωσης να είναι $\leq 10^{-8}$

(Δίνεται το σφάλμα απλής μεθόδου $E_S = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu)$).

ΛΥΣΗ

$h=0{,}2$, $x_0=-0{,}2$, $x_1 = x_0+h = -0{,}2+0{,}2=0$

$x_2 = x_0+2h = 0{,}2$, $x_3 = x_0+3h = 0{,}4$, $x_4 = 0{,}6$.

$I(f) = \frac{h}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right)$

Σύνθετη μέθοδος Simpson.

άρα $I(f) = \frac{0{,}2}{3}\left(\frac{1}{1{,}8} - 4\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2{,}2} + 4\,\frac{1}{2{,}4} + \frac{1}{2{,}6}\right) = 0{,}37$

Δίνεται το σφάλμα της απλής μεθόδου E_S

άρα πρέπει να πάμε στο σφάλμα της σύνθετης μεθόδου.

$E_S = -\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\mu)$. Στην απλή μέθοδο Simpson προσεγγίζω τη συνάρτηση μου με ένα πολυώνυμο β' βαθμού $P_2(x)$ στα x_0, x_1, x_2 στα $\Delta_1[x_0,x_1]$ και $\Delta_2[x_1,x_2]$

Άρα, κάνουμε μια διαμέριση $N=2M$, διότι εφαρμόζω τον απλό τύπο Simpson M φορές

Άρα, στο $[a,b] \rightsquigarrow [x_{2k-2}, x_{2k}]$ άρα θα έχουμε M τέτοια σφάλματα. Άρα $|E(f)| = \sum_{k=1}^{M} \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\mu) \leq$

$\leq \frac{h^5}{90}\cdot M \,\|f^{(4)}\|_\infty$. (*)

, όπου $h = \frac{b-a}{N} \Rightarrow N = \frac{b-a}{h} \Rightarrow \boxed{M = \frac{b-a}{2h}}$

άρα (*) $\frac{h^5}{90}\,\frac{b-a}{2h}\,\|f^{(4)}\|_\infty = \frac{h^4}{180}(b-a)\cdot\|f^{(4)}\|_\infty$

και όλο αυτό το θέλουμε $\leq 10^{-8}$

άρα $\frac{(b-a)^4}{180}(b-a)\cdot\|f^{(4)}\|_\infty = \frac{(b-a)^5}{180}\|f^{(4)}\|_\infty \leq 10^{-8} \Rightarrow$

$$\Rightarrow N^4 \geq \frac{(b-a)^5 \cdot \|f^{(4)}\|_\infty}{180 \cdot 10^{-8}} \quad (*)(*)$$

- $b-a = 0,6+0,2 = 0,8$

- $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$, $f''(x) = 2\frac{1}{(x+2)^3}$

 και $f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x+2)^5}$

- $\|f^{(4)}\|_\infty = \max\limits_{-0,2\leq x\leq 0,6}|f^{(4)}| = \max\{|f^{(4)}(0,6)|, |f^{(4)}(-0,2)|\} =$
 $= \max\{0,202, 1,27\} = 1,27$

$f^{(5)}(x) = -120\frac{1}{(x+2)^6} < 0$ άρα $f^{(4)} \searrow$ στο $[-0,2, 0,6]$

άρα $(*)(*)$ $N^4 \geq \frac{0,8}{180 \cdot 10^{-8}} \cdot 1,27 =$

$= \frac{8 \cdot 10^{-1} \cdot 10^8}{180} 1,27 =$

$= \frac{8}{18} \cdot 10^6 \cdot 1,27 =$

$= 4,8 \cdot 10^2 = 2,19 \cdot 10 =$

$= 21,9$

Άρα, απαιτούνται $N = 22$ βήματα